ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ СРЕДИ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 2023 ГОД

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ И СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАЧ

Даты проведения:
I Тур: 31.03.2023, Independence Hall, KBTU
II Тур: 14.04.2023, Independence Hall, KBTU

АО «Казахстанско-Британский Технический Университет», Школа Прикладной Математики, Алматы, 2023

1 Задача

Let $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ be a convergent series. Is it possible for $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023}$ to diverge?

Пусть ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ является сходящимся. Возможно ли такое, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023}$ расходится?

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ жинақты қатар берілсін. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023}$ қатары жинақсыз болуы мүмкін бе?

Solution. It is possible. Consider the series:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = b_1 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_1 + b_2 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_2 + \cdots + b_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}b_n + \cdots$$

Here, we define $b_n = \frac{1}{\sqrt[2023]{n}}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Clearly, the series is convergent because partial sums of the first $3n$ terms are equal to 0, i.e., $S_{3n} = 0$ and other sums differ by infinitesimal values. Now notice that:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023} &= b_1^{2023} - \left(\frac{b_1}{2}\right)^{2023} - \left(\frac{b_1}{2}\right)^{2023} + \cdots + b_n - \left(\frac{b_n}{2}\right)^{2023} - \left(\frac{b_n}{2}\right)^{2023} + \cdots \\ &= b_1^{2023}\left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right) + b_2^{2023}\left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right) + \cdots + b_n^{2023}\left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right) + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right) \cdot \left(b_1^{2023} + b_2^{2023} + \cdots + b_n^{2023} + \cdots\right).\end{aligned}$$

Partial sums of the first $3n$ terms of the new series are equal to

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

The latter expression tends to infinity, since it is a harmonic series, thus the series $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023}$ diverges.

Схема оценивания:

- Ответ был угадан (0 баллов)
- Выбран подходящий сходящийся ряд (+4 балла)
- Показано, что выбранный ряд сходится (+1 балл)
- Показано, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{2023}$ расходится (+5 балл)
- Имеются незначительные арифметические ошибки (-1 балл)

2 задача

Find all natural numbers n such that polynomial $p_n(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ is divisible by $x^2 + x + 1$

Найдите все натуральные числа n такое, что полином $p_n(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$

$p_n(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ полиномы $x^2 + x + 1$ полиномына бөлінетін барлық n натурал сандарын табыңыз

Критерий оценивания:

Не правильный подход

За нахождение двух таких n	+1 балл
За нахождение более двух таких n и ответ без доказательства	+2 балла

Правильный подход

За нахождение комплексных корней полинома $x^2 + x + 1$ и рассмотрение этих корней в полиноме $p_n(x)$	+3 балла
За решение системы (1)	+4 балла
За проверку, что второй корень $x^2 + x + 1$ в полиноме $p_n(x)$ приводится обратно к системе (1)	+3 балла
За арифметические неточности (в зависимости от серезности)	-1 балл

Solution. Lets find roots of the polynomial x^2+x+1: roots are $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ and $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. So, polynomial $p_n(x)$ is divisible by x^2+x+1 iff $p_n(x)$ has roots x_1 and x_2. Lets find n such that $p_n(x_1) = 0$:

$$p_n(x_1) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)^n - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 =$$

$$= \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)^n - \left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)^n - 1 =$$

$$= \cos(-\frac{n\pi}{3}) + i\sin(-\frac{n\pi}{3}) - \cos(-\frac{2n\pi}{3}) - i\sin(-\frac{2n\pi}{3}) - 1 =$$

$$= -2\sin(-\frac{n\pi}{2})\cdot\sin(\frac{n\pi}{6}) + i\cdot 2\cdot\sin(\frac{n\pi}{6})\cdot\cos(-\frac{n\pi}{2}) - 1 = 0$$

The last equation is equivalent to the following system

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin(\frac{n\pi}{2})\cdot\sin(\frac{n\pi}{6}) = \frac{1}{2} \\ \sin(\frac{n\pi}{6})\cdot\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Solution of the system on naturals is $n = 1+6k$ and $n = 5+6k$.

Its remains to check second root. By the same reasoning we can see that the equiation $p_n(x_2) = 0$ is equivalent to the system (1).

Answer is $n = 1+6k$ and $n = 5+6k$, where $k \in N \cup \{0\}$.

3 Задача

English:

The function $f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ is differentiable on its domain. It is known that for all $x > 1$

$$f^{'}(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f(x)$$

Also, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 2$. Prove that $f\left(\sqrt{2}+1\right) < 2^8$.

Russian:

Функция $f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на области определения. Известно, что для всех $x > 1$

$$f^{'}(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f(x)$$

Кроме того, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 2$. Докажите, что $f\left(\sqrt{2}+1\right) < 2^8$.

Kazakh:

$f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ функциясы анықталу облысында дифференциалданады. Барлық $x > 1$ үшін

$$f^{'}(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f(x)$$

теңдігі орындалатыны белгілі. Сонымен қатар, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 2$. Келесі тұжырымды дәлелдеңіз: $f\left(\sqrt{2}+1\right) < 2^8$.

Marking

Main steps:

1. Substitution $t = \frac{x+1}{x-1}$ was found (2 points)
2. It was found that $f^{'}\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = f'(t)$ (3 points)
3. Equation $f^{'}(x) = Ce^{x+\frac{2}{x-1}}$ was found (6 points)
4. Equation $f^{'}(x) = 2e^{x+\frac{2}{x-1}}$ was found (7 points)
5. Proof of main statement (10 points)

Additional steps

1. Substitution $x = \sqrt{2}+1$ to the original equation was made (+2 points)

How to mark

• Check with ”Main steps”: find until what step did the student write his/her solution, then put the mark of that very step.

• Check with ”Additional steps”: find what steps did student write? Put corresponding marks for all steps.

4 задача

Problem: Check amount
Alikhan left the store, and it became interesting for him to recalculate the amount in the check. The check is a string in which the names of purchases and their prices are written in a row without spaces. The check has the form "name1price1name2price2 ...namenpricen", where namei (the name of the i-th product) is a non—empty string of length no more than 10, consisting of lowercase letters of the Latin alphabet, and pricei (the price of the i-th product) is a non—empty string consisting of dots and numbers. Products with the same name may have different prices.
The price of each product is recorded in the following format:
1) If the product costs a whole amount of tenge, then tiyns are not written. Otherwise, after recording the amount of tenge, a point is attributed to the price, followed by exactly two digits written tiyns (if tiyn is less than 10, then a leading zero is used).
2) Every three digits (from less significant to more significant) in the tenge record are separated by dots. Extra leading zeros are not allowed, the price record always starts with a digit and ends with a digit.
Write a program that will find the total price based on the contents of the check.
Example:

1) input data: chipsy48.32televizor12.390 output data: 12.438.32
2) input data: a1b2c3.38 output data: 6.38

Marking scheme:
1. Getting only numbers from a string / Replacing letters with another character – 1 point
2. Separation of whole and fractional parts – 3 points
3. Addition of the whole part separately – 1 point
4. Addition of a separate fractional part – 1 point
5. Conversion of tiyns to tenge – 2 points
6. Print the correct result – 2 points

Задача. Сумма чека
Алихан вышел из магазина, и ему стало интересно пересчитать сумму в чеке. Чек представляет собой строку, в которой названия покупок и их цены записаны подряд без пробелов. Чек имеет вид «name1price1name2price2…namenpricen», где namei (название i-го продукта) — это непустая строка длины не более 10, состоящая из строчных букв латинского алфавита, а pricei (цена i-го продукта) — это непустая строка, состоящая из точек и цифр. Продукты с одинаковым названием могут иметь разные цены.
Цена каждого продукта записана в следующем формате:
1)Если продукт стоит целое количество тенге, то тиыны не пишутся. Иначе, после записи количества тенге к цене приписывается точка, за которой следом ровно двумя цифрами записаны тиыны(если тиын менее 10, то используется лидирующий ноль).
2) Каждые три разряда (от менее значимых к более значимым) в записи тенге разделяются точками. Лишние лидирующие нули недопустимы, запись цены всегда начинается с цифры и заканчивается цифрой.
Напишите программу, которая по содержимому чека найдет суммарную цену всех покупок.
РЕШЕНИЕ:
Записи цен:
«234», «1.544», «149.431.10», «0.99» и «123.05» являются корректными,

«.333», «3.33.11», «12.00», «.33», «0.1234» и «1.2» не являются корректными.
Для начала нужно выделить все последовательности из подряд идущих цифр и точек, которые являлись ценами. Затем нужно выделить целое количество тенге из каждой цены и отдельно считать сумму всех целых цен в переменную, например r. То же нужно было делать для тиынов из каждой цены и складывать их в переменную c.
После обработки всех цен нужно перевести тиыны в тенге, то есть прибавить к r величину c / 100 (целая часть от деления c на 100), а c присвоить значению c%100 (остаток от деления c на 100). После этого осталось только аккуратно вывести ответ, не забыв, что если c < 10, то сначала для тиынов нужно вывести 0, а затем c, так как количество тиынов по условию обязательно должно состоять из двух цифр.

Программа на Python

```
import string
#=======================================================
def to_dig(s):
    s = s[:-3].replace('.', '_') + s[-3:]
    if '.' in s:
        return float(s)
    else:
        return int(s)
#=======================================================
def to_str(n):
    res = ''
    if isinstance(n, float):
        res = '.' + str( round( n%1 * 100 ) ).zfill(2)
        if res == '.00':
            res = ''
        n = int(n)
    return '{:,}'.format(n).replace(',', '.') + res
#=======================================================
s = input( 's = ' )
for symb in string.ascii_lowercase:
    s = s.replace(symb, ' ')
nums = map( to_dig, s.split() )
print( to_str( sum(nums) ) )
```

```
s = chipsy48.32televizor12.390
12.438.32
```

```
import string
#=====================================================================
def to_dig(s):
    s = s[:-3].replace('.', '_') + s[-3:]
    if '.' in s:
        return float(s)
    else:
        return int(s)
#=====================================================================
def to_str(n):
```

```
    res = ''
    if isinstance(n, float):
        res = '.' + str(round(n%1*100)).zfill(2)
        if res == '.00':
            res = ''
        n = int(n)
    return '{:,}'.format(n).replace(',', '.') + res
#============================================================================
s = input( 's = ' )
for symb in string.ascii_lowercase:
    s = s.replace(symb, ' ')
nums = map(to_dig, s.split())
print( to_str(sum(nums)))
```

Marking scheme:

1. Получение из строки только цифры / Замена букв на другой символ – 1 point
2. Разделение целой и дробной части – 3 points
3. Сложение отдельно целой части – 1 points
4. Сложение отдельно дробной части – 1 points
5. Переведение тиынов в тенге – 2 points
6. Выведение правильного результата – 2 points

5 задача

Problem 5. You play the following game against Arman. Arman generates two independent random variables from uniform distribution from 0 to 1 (U[0, 1]). Then writes them down on two pieces of papers. Then puts them on the table with the numbers face down and shuffles. Then, you pick any paper and look at the number. Then decide whether to swap it to the second number or keep it. If you end up with the biggest number out of two you win. The number is the biggest if it is greater or equal than another. Show that you have a strategy to win this game with probability at least 0.75. (The distribution of a random variable is called uniform if all the values belonging to the interval have the same probability density.)

Задание 5.
Вы играете игру с Арманом. Арман генерирует две независимые случайные величины из равномерного распределения от 0 до 1 (U[0, 1]). Записывает их на двух листках бумаги. Затем кладет их на стол цифрами вниз и перемешивает. Вы берете любую бумагу и смотрите на номер. Затем решаете, поменять ли его на второй номер или оставить себе. Если у вас в итоге получится наибольшее число из двух, вы выиграете. Число является наибольшим, если оно больше или равно другому. Покажите, что у вас есть стратегия, позволяющая выиграть эту игру с вероятностью не менее 0.75. (Распределение случайной величины называется равномерным если, на интервале которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения постоянна.)

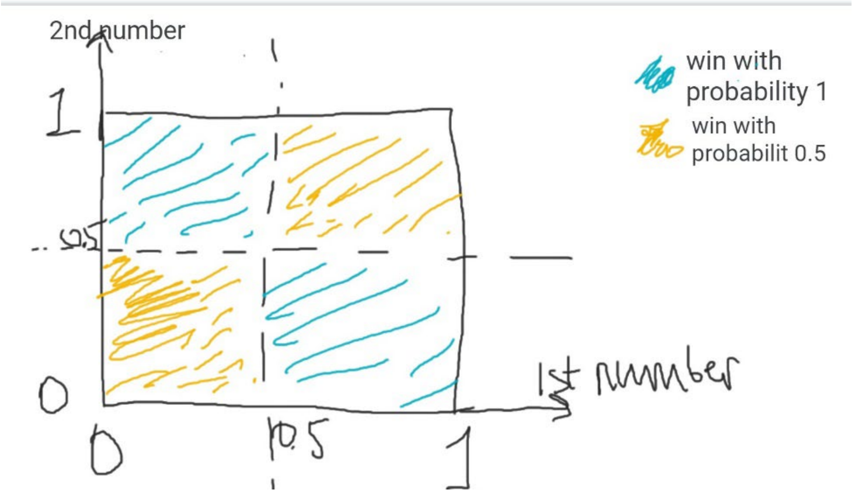
Есеп 5.
Келесі ойында сіз Арманға қарсы ойнайсыз. Арман 0-ден 1-ге дейін (U[0, 1]) бірқалыпты үлестірімнен екі тәуелсіз кездейсоқ шаманы таңдайды. Содан кейін оларды екі қағазға жазады. Кейін оларды үстелге сандармен төмен қаратып қойып, араластырады. Сіз кез-келген қағазды алып, жазылған санды көресіз, содан кейін оны екінші санға ауыстыру немесе сақтау туралы шешім қабылдайсыз. Егер сіз екеуінең ең үлкен санды алсаңыз, сіз жеңесіз. Егер сан басқасынан үлкен немесе оған тең болса, сан ең үлкен болып саналады. Сізде бұл ойында кем дегенде 0.75 ықтималдықпен жеңіске жету стратегиясы бар екенін көрсетіңіз. (Кездейсоқ шаманың таралуы бірқалыпты деп аталады, егер кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері жататын интервалда таралу тығыздығы тұрақты болса.)

Solution

Your strategy is: to keep the number if it is greater than 0.5 or swap it otherwise.

Let's consider all possible cases:

Consider the case when Arman generated one number <= (less or equal) 0.5 and another number (greater) > 0.5. It is blue region in the figure. In this case, no matter what paper you pick first you will end up with the biggest number at the end with the strategy. Because, you swap if it is the smallest and keep if it the largest following your strategy.



In the case when two numbers > 0.5 (yellow region). You win only in the case when you pick the biggest number from the start and then keep it following your strategy. But, two numbers are shuffled, and only one of them is biggest, thus there is 1/2 chance to win in this case.

Similarly, 1/2 chance to win when two numbers <= 0.5 (yellow region), because you win when you don't pick the biggest number at the beginning and then swap it following your strategy.

Since blue and yellow regions happening have probabilities equal to 0.5. Thus, total probability to win is
P(win) = P (win | blue region) * P(blue region) + P(win | yellow region) * P(yellow region) = 1 * 0.5 + 1/2 * 0.5 = 0.75.

So, we indeed have a strategy that wins with at least (in this case exactly) 0.75 probability. Maybe there are better strategies giving greater probabilities that will also satisfy.

Guessing the strategy +3 points
Formally showing its correctness - 7 points
- Considered all cases + 3 point
- Showed that probability is 0.75 (or more) + 4 points

6 Задача

Задача 6. Пусть $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, где через $\mathbb{Z}^+$ обозначено множество всех неотрицательных целых чисел, и $f(n)$ – наибольшее число k такое, что 2^k делит целое число $\left[\left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ без остатка, где через $[x]$ обозначена целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Напишите код (алгоритм вычисления) функции $f(n)$ для любого $n \in \mathbb{Z}^+$, используя при этом только неотрицательную целочисленную арифметику (т.е. нельзя использовать операцию извлечения корня и вещественную арифметику).

Problem 6. Let $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, where $\mathbb{Z}^+$ denotes the set of all non-negative integers, and $f(n)$ is the largest number k such that 2^k divides the integer $\left[\left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ without remainder, where $[x]$ denotes the integer part of the number x, i.e. largest integer not exceeding x. Write a code (calculation algorithm) for the function $f(n)$ for any $n \in \mathbb{Z}^+$, using only non-negative integer arithmetic (i.e., you cannot use the operation of extracting the root and real arithmetic).

Есеп 6. $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ болсын, мұнда $\mathbb{Z}^+$ барлық теріс емес бүтін сандар жиынын білдіреді, сонымен қатар кез келген $n \in \mathbb{Z}^+$ үшін $f(n)$ функциясының мәні 2^k бүтін $\left[\left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ санын қалдықсыз бөлетін ең үлкен k санына тең болсын, мұндағы $[x]$ арқылы x санының бүтін бөлігі, яғни x-тен аспайтын ең үлкен бүтін сан белгіленген. Тек теріс емес бүтін арифметиканы қолдана отырып, кез келген $n \in \mathbb{Z}^+$ үшін $f(n)$ функциясының кодын (есептеу алгоритмін) жазыңыз (яғни, түбірден алу операциясын және нақты арифметиканы пайдалануға болмайды).

Решение.

Построим следующую последовательность:
$a_n = \left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(3-\sqrt{11}\right)^n$, где $n \in \mathbb{Z}^+$.

Лемма 1. $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 2a_n$.

Доказательство.

$$a_n = \left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(3-\sqrt{11}\right)^n$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(3+\sqrt{11}\right)^{n+1} + \left(3-\sqrt{11}\right)^{n+1} \\ &= \left(3+\sqrt{11}\right)\left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(3-\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)^n \end{aligned}$$

$$a_{n+2} = \left(3+\sqrt{11}\right)^2\left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(3-\sqrt{11}\right)^2\left(3-\sqrt{11}\right)^n$$
$$= \left(20+6\sqrt{11}\right)\left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(20-6\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)^n$$
$$= \left(18+6\sqrt{11}\right)\left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(18-6\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)^n + 2 \cdot \left(3+\sqrt{11}\right)^{n+1} + 2\cdot\left(3-\sqrt{11}\right)^{n+1} = 6a_{n+1} + 2a_n$$

Лемма 1 доказана.

Так как $a_0 = 2, a_1 = 6$, то $a_n \in \mathbb{Z}$ для любых $n \in \mathbb{Z}^+$.

Заметим, что $-1 < 3 - \sqrt{11} < 0$. Следовательно,

$$a_{2n-1} = \left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1} + \left(3-\sqrt{11}\right)^{2n-1} < \left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1} < a_{2n-1} + 1$$

Откуда,

$$a_{2n-1} = \left[\left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1}\right].$$

Лемма 2. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $(2^n | a_{2n-2}$ и $2^n | a_{2n-1}$, но $2^{n+1} \nmid a_{2n-1})$.

Доказательство.

Доказательство проведем по индукции.

При $n = 1$ утверждение Леммы 2 верно, так как $a_0 = 2, a_1 = 6$ и $2|a_0, 2|a_1$, но $2 \nmid a_1$. Пусть утверждение Леммы 2 верно для n и мы докажем, что оно верно и для $n+1$.

Поскольку $2^n | a_{2n-2}$ и $2^n | a_{2n-1}$, а также $a_{2n} = 6a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$, то $2^{n+1} | a_{2n}$.

Поскольку $2^n | a_{2n-1}$ и $2^n | a_{2n}$, а также $a_{2n+1} = 6a_{2n} + 2a_{2n-1}$, то $2^{n+1} | a_{2n+1}$. Но в то же время $2^{n+2} \nmid a_{2n+1}$, так как $2^{n+2} | 6a_{2n}$, но $2^{n+2} \nmid 2a_{2n-1}$.

Лемма 2 доказана.

Из доказанной Леммы 2 следует, что $f(n) = n$. Алгоритм вычисления такой функций очевиден.

Схема оценивания:

1.	Рассмотрена последовательность $a_n = \left(3+\sqrt{11}\right)^n + \left(3-\sqrt{11}\right)^n$	(+1 балл)
2.	Доказана Лемма 1 для последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$	(+3 балла)
3.	Доказано, что $a_{2n-1} = \left[\left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$	(+2 балла)
4.	Доказана Лемма 2 для последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$	(+3 балла)
5.	Задача решена полностью	(10 баллов)
6.	При наличии незначительных ошибок	(-1 балл)
7.	Угадано, что $f(n) = n$	(0 баллов)

Примечание:

1.	Доказаны пункты 3 и 4 (не используя пункт 2) для $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$	(9 баллов)