

АННОТАЦИЯ

диссертации докторанта PhD по специальности
8D06101 - Информатика, вычислительная техника и управление

Аманова Э.Н. на тему:

«Инварианты тензоров и их приложения в квантовой теории информации».

Общая характеристика работы. В данной диссертации систематически изучается структура инвариантных полиномов тензоров (многомерных обобщений детерминантов из классической линейной алгебры), раскрываются различные свойства, способствующие более глубокому пониманию их роли в квантовой теории информации. Значительное внимание уделяется инвариантным полиномам минимальной степени, для которых получена точная нижняя граница, что дает новое понимание вычислительной сложности, связанной с этими полиномами. Кроме того, в работе разработан новый алгоритм вычисления инвариантных полиномов, предлагающий эффективный подход, который улучшает как теоретический анализ, так и практические приложения в квантовых вычислениях и смежных областях.

Актуальность темы исследования. Быстрое развитие квантовых вычислений и квантовой теории информации выявило необходимость в передовых математических структурах, которые могут описывать и манипулировать сложными квантовыми состояниями. Понимание фундаментальных свойств тензоров и их инвариантов имеет решающее значение в этих областях. Инвариантные полиномы служат инструментами для классификации квантовых состояний и измерения запутанности, что делает их необходимыми для разработки безопасных квантовых протоколов и эффективных квантовых алгоритмов. Более того, из-за вычислительной сложности тензорных задач возникает потребность в изучении и вычислении инвариантных полиномов наименьшего размера.

Цель исследования. Основная цель этого исследования — разработать всеобъемлющую структуру для изучения инвариантных полиномов тензоров, особенно сосредоточившись на полиномах минимальной степени. Исследование стремится установить систематические методы анализа структуры и свойств этих полиномов с целью определения минимально возможных степеней инвариантов для различных тензорных пространств. Кроме того, исследование направлено на решение вычислительных задач путем разработки эффективных алгоритмов для генерации и вычисления инвариантных полиномов, тем самым предоставляя инструменты, которые являются как теоретически значимыми, так и практически применимыми в контексте квантовой теории информации и смежных областях.

Методы исследования. Решение поставленных задач получено алгебраическими и комбинаторными методами. Доказательства широко используют двойственность Шура-Вейля, теорию представлений симметрической группы и алгебраическую комбинаторику. Практические результаты получены с использованием языка программирования C++. Также

для вычисления таблиц коэффициентов Кронекера использовалась библиотека Sage на Python.

Научная новизна и общие положения, выносимые на защиту. Научная новизна предлагаемого исследования заключается в выведении изучения инвариантных полиномов на более системный и широкий уровень. Междисциплинарный характер исследования создает определенные трудности при разработке таких систем и требует использования методов и подходов из разных областей знаний.

В диссертации впервые получены следующие результаты:

1. Систематическое исследование инвариантных полиномов тензоров, которое предлагает единую комбинаторную основу для изучения инвариантов любой степени. Это включает: вывод конкретной формулы общего инвариантного полинома, вывод охватывающего множества инвариантов фиксированной степени, условия исчезновения, общие свойства и важные коэффициенты.

2. Вычисление нижней границы для минимальной степени инвариантных полиномов заданного тензорного пространства, которая, как показано, является точной в фундаментальных случаях.

3. Разработан эффективный алгоритм для вычисления базиса инвариантных полиномов фиксированной степени, который экспоненциально быстрее всех наивных подходов.

4. Вычисление базиса инвариантных полиномов фиксированной степени во всех достигаемых случаях: степень 4 и степень 6 для 3 кубитов, степень 6 и степень 9 для 3 кутритов, степень 4 и степень 6 для 5 кубитов, степень 6 и степень 9 для 5 кутритов, степень 4 для 7 кубитов.

Обоснованность и надежность результатов и выводов.

Обоснованность и надежность результатов и выводов в этой диссертации обеспечиваются посредством строгих математических доказательств, обширных вычислительных экспериментов и согласованности с существующими теоретическими рамками. Предложенные методы и алгоритмы вычисления инвариантных полиномов проверены с помощью множества тестовых случаев, включающих тензоры различной размерности и сложности, демонстрирующих их эффективность и точность. Отсутствие аналогичных вычислений в некоторых случаях подтверждает новизну вычислений.

Практическая ценность и реализация результатов. Результаты этой диссертации имеют значительную практическую ценность в квантовой теории информации, вычислительной математике и теоретической информатике. Разработанные алгоритмы генерации и вычисления инвариантных полиномов повышают вычислительную эффективность, позволяя анализировать многомерные тензоры в квантовых вычислениях и анализе данных. Эти алгоритмы реализованы в вычислительных платформах, таких как библиотека Sage Python и пользовательские программы C++, что делает их доступными для интеграции в исследовательские и промышленные приложения.

Результаты вносят вклад в квантовые вычисления, улучшая методы классификации квантовых состояний и измерения запутанности, которые необходимы для разработки безопасных квантовых алгоритмов и протоколов связи. Кроме того, результаты ценны в образовательных учреждениях, обогащая курсы по квантовым вычислениям и продвинутой математике, а также способствуя передаче знаний посредством обучения и семинаров.

Кроме того, работа имеет потенциальные промышленные приложения в криптографии, телекоммуникациях и безопасности данных, где понимание тензорных инвариантов может улучшить проектирование безопасных систем. В целом, эта диссертация связывает теоретические исследования с практическим применением, предоставляя необходимые инструменты и идеи, которые продвигают область квантовой информатики и за ее пределы.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы были представлены и обсуждены в следующих публикациях в международных журналах:

1. Forum of Mathematics Sigma, том 11, 2023, статья e63 (Web of Science Q1).
2. International Mathematics Research Notices, том 2023, выпуск 20, 2023, страницы 17552-17599 (Scopus Q1, Citescore 2023 перцентиль 76).
3. Linear Algebra and its Applications, том 656, 2023, страницы 224-246 (Web of Science Q1).
4. Proceedings of the American Mathematical Society, том 150, 2022, страницы 4113-4128 (Scopus Q2, Citescore 2022 перцентиль 62).
5. Вестник Казахско-Британского Технического Университета, том 21 №2, 2024, страницы 95–105 (рекомендовано ККСОН).
6. Вестник Казахско-Британского Технического Университета, том 21 №3, 2024, страницы 58–65 (рекомендовано ККСОН).
7. Вестник Казахско-Британского Технического Университета, том 21 №3, 2024, страницы 128–136 (рекомендовано ККСОН).

Также результаты работы были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1. Инвариантные полиномы и их применение в квантовых вычислениях, 2024 IEEE AITU: Digital Generation, Астана IT University, 2024.
2. Фундаментальные инварианты, тематическая исследовательская программа "Тензоры: геометрия, сложность и квантовая запутанность", Варшавский университет, Инициатива по совершенству – Исследовательский университет, Фонд Симонса, Польская академия наук, 2023.
3. Некоторые унимодальные последовательности коэффициентов Кронекера, семинар по теории разбиений, q -ряды и смежные темы, Технологический университет Мичигана, 2024.
4. Фундаментальные инварианты, семинар Польской академии наук, Бендлево, Польша, 2023.
5. Статистика МакМахона для многомерных разбиений, семинар ADA University, 2022.

6. Комбинаторный гипердетерминант и мультипланарные сети, традиционная международная апрельская математическая конференция, посвященная Дню работников науки Республики Казахстан, Институт математики, Казахстан, 2022.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ, в том числе 3 статьи в журналах Scopus или Web of Science Q1 и 1 статья в журнале Q2, 3 статьи в журнале, рекомендованном ВАК, 1 акт внедрения и 1 авторское свидетельство.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 3 глав, содержит 116 страниц, 13 рисунков и 11 таблиц, 7 листингов, список использованных источников из 69 ссылок и приложений.

АННОТАЦИЯ

мамандығы бойынша кандидаттық диссертация
8D06101 – Информатика, есептеу техникасы және басқару
Аманова Ә.Н. тақырып бойынша:
«Тензор инварианттары және оның кванттық
ақпарат теориясына қолданылуы».

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Бұл диссертация тензорлардың инварианттық көпмүшеліктерінің құрылымын жүйелі түрде зерттейді, олардың кванттық ақпарат теориясындағы рөлін тереңірек түсінуге ықпал ететін әртүрлі қасиеттерін ашады. Минималды дәрежедегі инвариантты көпмүшелерге көп көңіл бөлінеді, олар үшін осы көпмүшеліктермен байланысты есептеу күрделілігі туралы жаңа түсінікті қамтамасыз ететін қатаң төменгі шекара алынады. Сонымен қатар, мақалада инварианттық көпмүшелерді есептеудің жаңа алгоритмі ұсынылған, ол теориялық талдауды да, кванттық есептеулерде және онымен байланысты салаларда практикалық қолданбаларды да жетілдіретін тиімді тәсілді ұсынады.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Кванттық есептеулер мен кванттық ақпарат теориясының қарқынды дамуы күрделі кванттық күйлерді сипаттайтын және басқара алатын жетілдірілген математикалық құрылымдардың қажеттілігін көрсетті. Тензорлардың және олардың инварианттарының іргелі қасиеттерін түсіну осы салаларда өте маңызды. Инвариантты көпмүшеліктер кванттық күйлерді жіктеу және шатасуды өлшеу құралы ретінде қызмет етеді, бұл оларды қауіпсіз кванттық хаттамаларды және тиімді кванттық алгоритмдерді әзірлеу үшін маңызды етеді. Оның үстіне тензорлық есептердің есептеу күрделілігіне байланысты ең кіші өлшемдегі инвариантты көпмүшелерді зерттеу және есептеу қажеттілігі туындайды.

Зерттеудің мақсаты. Бұл зерттеудің негізгі мақсаты - инвариантты тензорлық көпмүшелерді зерттеудің жан-жақты құрылымын әзірлеу, әсіресе минималды дәрежелі көпмүшелерге назар аудару. Зерттеу әртүрлі тензорлық кеңістіктер үшін инварианттардың мүмкін болатын ең аз дәрежелерін анықтау үшін осы көпмүшелердің құрылымы мен қасиеттерін талдаудың жүйелі әдістерін құруға ұмтылады. Сонымен қатар, зерттеу инварианттық көпмүшелерді құру және есептеу үшін тиімді алгоритмдерді әзірлеу арқылы есептеу мәселелерін шешуге бағытталған, осылайша кванттық ақпарат теориясы мен байланысты өрістер контекстінде теориялық тұрғыдан маңызды және практикалық түрде қолданылатын құралдарды ұсынады.

Зерттеу әдістері. Есептердің шешімі алгебралық және комбинаторлық әдістер арқылы алынды. Дәлелдемелер Schur-Weil дуализмін, ұсыну теориясын және алгебралық комбинаториканы кеңінен пайдаланады. Тәжірибелік нәтижелер C++ бағдарламалау тілі арқылы алынды. Python тіліндегі Sage кітапханасы Kronecker коэффициенттерінің кестелерін есептеу үшін де пайдаланылды.

Қорғауға ұсынылған ғылыми жаңалық және жалпы ережелер. Ұсынылып отырған зерттеу жұмысының ғылыми жаңалығы инвариантты

көпмүшелерді зерттеуді жүйелі әрі кеңірек деңгейге жеткізуде жатыр. Зерттеудің пәнаралық сипаты мұндай жүйелерді әзірлеуде белгілі бір қиындықтар туғызады және білімнің әртүрлі салаларындағы әдістер мен тәсілдерді қолдануды талап етеді.

Диссертацияда бірінші рет келесі нәтижелер алынды:

1. Кез келген дәрежедегі инварианттарды зерттеу үшін біртұтас комбинаторлық негізді ұсынатын тензорлардың инварианттық көпмүшеліктерін жүйелі зерттеу. Оған мыналар жатады: жалпы инвариантты көпмүшенің арнайы формуласын шығару, тұрақты дәрежедегі инварианттарды жабу жиынын шығару, өшу жағдайлары, жалпы қасиеттер мен маңызды коэффициенттер.

2. Берілген тензор кеңістігінің инварианттық көпмүшеліктерінің ең төменгі дәрежесі үшін төменгі шекті есептеңіз, ол фундаменталды жағдайларда дәл болады.

3. Барлық аңғал тәсілдерге қарағанда экспоненциалды түрде жылдамырақ тіркелген дәрежелі инварианттық көпмүшелердің негізін есептеудің тиімді алгоритмін құру.

4. Барлық мүмкін жағдайларда тіркелген дәрежелі инварианттық көпмүшелердің негізін есептеу: 3 кубит үшін 4 дәреже және 6 дәреже, 3 кубит үшін 6 дәреже және 9 дәреже, 5 кубит үшін 4 және 6 дәреже, 6 дәреже және 9 дәреже 5 кубит үшін, 7 кубиттің 4 дәрежесі.

Нәтижелер мен қорытындылардың негізділігі мен сенімділігі. Бұл дипломдық жұмыстағы нәтижелер мен қорытындылардың негізділігі мен сенімділігі қатаң математикалық дәлелдер, ауқымды есептеу эксперименттері және қолданыстағы теориялық негіздерге сәйкестік арқылы қамтамасыз етіледі. Инвариантты көпмүшелерді есептеудің ұсынылған әдістері мен алгоритмдері олардың тиімділігі мен дәлдігін көрсете отырып, әртүрлі өлшемдер мен күрделіліктегі тензорларды қамтитын көптеген сынақ жағдайларын қолдану арқылы сыналған. Кейбір жағдайларда ұқсас есептеулердің болмауы есептеулердің жаңалығын растайды.

Нәтижелердің практикалық мәні және жүзеге асырылуы. Бұл дипломдық жұмыстың нәтижелері кванттық ақпарат теориясында, есептеу математикасында және теориялық информатикада маңызды практикалық мәнге ие. Инвариантты көпмүшелерді құру және есептеу үшін әзірленген алгоритмдер кванттық есептеулерде және деректерді талдауда көп өлшемді тензорларды талдауға мүмкіндік беретін есептеу тиімділігін арттырады. Бұл алгоритмдер Sage Python кітапханасы және реттелетін C++ бағдарламалары сияқты есептеу платформаларында жүзеге асырылады, бұл оларды ғылыми және өнеркәсіптік қолданбаларға біріктіру үшін қолжетімді етеді.

Нәтижелер кванттық күйлерді жіктеу әдістерін жетілдіру және қауіпсіз кванттық алгоритмдер мен байланыс хаттамаларын әзірлеу үшін маңызды болып табылатын түйіспелерді өлшеу арқылы кванттық есептеулерге ықпал етеді. Сонымен қатар, нәтижелер кванттық есептеулер мен тереңдетілген математика бойынша курстарды байыту, сондай-ақ тренингтер мен семинарлар арқылы білім беруді жеңілдету үшін оқу орындарында құнды.

Сонымен қатар, жұмыстың криптография, телекоммуникация және деректер қауіпсіздігі саласындағы әлеуетті өнеркәсіптік қолданбалары бар, мұнда тензорлық инварианттарды түсіну қауіпсіз жүйелердің дизайнын жақсартуға мүмкіндік береді. Тұтастай алғанда, бұл диссертация теориялық зерттеулерді практикалық қолданбалармен байланыстырады, кванттық ақпараттану саласын және одан тыс жерлерді дамытатын маңызды құралдар мен идеяларды ұсынады.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі ережелері мен нәтижелері халықаралық журналдарда келесі жарияланымдарда ұсынылды және талқыланды:

1. Forum of Mathematics, Sigma, 11 том, 2023 ж., еб3 қағазы (Web of Science Q1).
2. International Mathematics Research Notices, том 2023, 20 шығарылым, 2023, 17552-17599 беттер (Scopus Q1, Citescore 2023 пайыздық 76).
3. Linear Algebra and its Applications, том 656, 2023, 224-246 беттер (Web of Science Q1).
4. Proceedings of the American Mathematical Society, том 150, 2022, 4113-4128 беттер (Scopus Q2, Citescore 2022 пайыздық 62).
5. Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 21 том № 2, 2024 ж., 95–105 беттер (ҚКСОН ұсынған).
6. Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 21 том № 3, 2024 ж., 58–65 беттер (ҚКСОН ұсынған).
7. Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 21 том № 3, 2024 ж., 128–136 беттер (ҚКСОН ұсынған).

Сондай-ақ жұмыс нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда баяндалды:

1. Инвариантты полиномдар және олардың кванттық есептеулерде қолданылуы, 2024 IEEE AITU: Digital Generation, Astana IT University, 2024.
2. Негізгі инварианттар, «Тензорлар: геометрия, күрделілік және кванттық түйісу» өзекті зерттеу бағдарламасы, Варшава университеті, Excellence Initiative – Зерттеу университеті, Simons Foundation, Польша ғылым академиясы, 2023 ж.
3. Кронеккер коэффициенттерінің кейбір унимодальды тізбектері, Бөлу теориясы бойынша семинар, q-сериялар және байланысты тақырыптар, Мичиган технологиялық университеті, 2024 ж.
4. Негізгі инварианттар, Польша ғылым академиясының семинары, Бендлево, Польша, 2023 ж.
5. Жоғары өлшемді бөлімдерге арналған МакМахон статистикасы, ADA университетінің семинары, 2022 ж.
6. Комбинаторлық гипердетерминант және мультипланарлық желілер, Қазақстан Республикасы ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы, Математика институты, Қазақстан, 2022 ж.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған 7 жұмыс, оның ішінде Scopus немесе Web of Science Q1 журналдарында 3

мақала және Q2 журналында 1 мақала, ВАК ұсынған журналда 3 мақала, 1 орындау актісі және 1 авторлық куәлік.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден және 3 тараудан тұрады, 116 беттен, 13 сурет пен 11 кестеден, 7 тізімнен, 69 пайдаланылған әдебиеттер тізімі мен қосымшалардан тұрады.

ANNOTATION

of the dissertation by the doctoral student of PhD
on specialty 8D06101 - Computer Science, Computer Engineering and Control
by Amanov A.N. on the thesis:

"Tensor invariants and their applications to quantum information theory."

General characteristics of the work. This dissertation systematically studies the structure of invariant polynomials of tensors, revealing various properties that contribute to a deeper understanding of their role in quantum information theory. A significant focus is placed on invariant polynomials of minimal degree, for which a sharp lower bound has been obtained, providing new insights into the computational complexity associated with these polynomials. Additionally, the work presents a novel algorithm for the calculation of invariant polynomials, offering an efficient approach that enhances both theoretical analysis and practical applications in quantum computing and related fields.

Relevance of the research topic. The rapid development of quantum computing and quantum information theory has highlighted the need for advanced mathematical frameworks that can describe and manipulate complex quantum states. Understanding the fundamental properties of tensors and their invariants is crucial in these fields. Invariant polynomials serve as tools to classify quantum states and measure entanglement, making them essential for the development of secure quantum protocols and efficient quantum algorithms. Moreover, due to computational hardness of tensor problems, there is an urge to study and calculate invariant polynomials of smallest size.

The aim of the research. The primary aim of this research is to develop a comprehensive framework for the study of invariant polynomials of tensors, particularly focusing on those of minimal degree. The research seeks to establish systematic methods for analyzing the structure and properties of these polynomials, with a goal of determining the minimal possible degrees of invariants for various tensor spaces. Additionally, the study aims to address computational challenges by developing efficient algorithms for generating and calculating invariant polynomials, thus providing tools that are both theoretically significant and practically applicable in the context of quantum information theory and related fields..

Research methods. The solution to the given problems were obtained by algebraic and combinatorial methods. The proofs extensively use Schur-Weyl duality, representation theory and algebraic combinatorics. Practical results were held using programming language C++. Also, Sage library on Python were used to compute tables of Kronecker coefficients.

Scientific novelty and general points for the defense. Scientific novelty of the proposed research is to extend the study of invariant polynomials to a more systematic and broader level.. The interdisciplinary nature of the research creates certain difficulties during the development of such systems and requires the usage of the methods and approaches from different areas of knowledge.

In the dissertation there were firstly obtained the following results:

1. Systematic research of invariant polynomials of tensors, which offers unified combinatorial framework to study invariants of any degree. This includes: derivation of concrete formula of generic invariant polynomial, derivation of the spanning set of invariants of fixed degree, vanishing conditions, general properties and important coefficients.

2. Calculation of the lower bound for the minimal degree of invariant polynomials of given tensor space, which is shown to be sharp in fundamental cases.

3. Design of efficient algorithm for calculation of the basis of invariant polynomials of fixed degree, which exponentially faster than all naive approaches.

4. Calculation of the basis of invariant polynomials of fixed degree in all feasible cases: degree 4 and degree 6 for 3 qubits, degree 6 and degree 9 for 3 qutrits, degree 4 and degree 6 for 5 qubits, degree 6 and degree 9 for 5 qutrits, degree 4 of 7 qubits.

Validity and reliability of the results and conclusions. The validity and reliability of the results and conclusions in this dissertation are ensured through rigorous mathematical proofs, extensive computational experiments, and consistency with existing theoretical frameworks. The proposed methods and algorithms for calculating invariant polynomials are validated through multiple test cases involving tensors of varying dimensions and complexities, demonstrating their effectiveness and accuracy. The absence of similar calculations in some cases confirms the novelty of calculations.

The practical value and implementation of the results. The results of this dissertation have significant practical value in quantum information theory, computational mathematics, and theoretical computer science. The developed algorithms for generating and calculating invariant polynomials enhance computational efficiency, allowing for the analysis of high-dimensional tensors in quantum computing and data analysis. These algorithms are implemented in computational platforms like Python's Sage library and custom C++ programs, making them accessible for integration into research and industrial applications.

The findings contribute to quantum computing by improving methods for quantum state classification and entanglement measurement, which are essential for developing secure quantum algorithms and communication protocols. Additionally, the results are valuable in educational settings, enriching courses on quantum computing and advanced mathematics, and fostering knowledge transfer through teaching and seminars.

Furthermore, the work has potential industrial applications in cryptography, telecommunications, and data security, where the understanding of tensor invariants can enhance the design of secure systems. Overall, this dissertation bridges theoretical research with practical application, providing essential tools and insights that advance the field of quantum information science and beyond.

Approbation of work. The general points and results of the work were presented and discussed in the following works published in international journals:

1. **Forum of Mathematics Sigma**, Vol. 11, 2023, article e63 (Web of Science Q1).

2. **International Mathematics Research Notices**, Vol. 2023, Issue 20, 2023, 17552-17599 (Scopus Q1, Citescore 2023 percentile 76).
3. **Linear Algebra and its Applications**, Vol. 656, 2023, 224-246 (Web of Science Q1).
4. **Proceedings of the American Mathematical Society**, Vol. 150, 2022, 4113-4128 (Scopus Q2, Citescore 2022 percentile 62).
5. **Herald of the Kazakh-British Technical University**, Volume 21 No. 2, 2024, Pages 95–105 (recommended by the Committee for Control of Education and Science).
6. **Herald of the Kazakh-British Technical University**, Volume 21 No. 3, 2024, Pages 58–65 (recommended by the Committee for Control of Education and Science).
7. **Herald of the Kazakh-British Technical University**, Volume 21 No. 3, 2024, Pages 128–136 (recommended by the Committee for Control of Education and Science).

Also, the results of the work were reported at the following conferences and seminars:

1. Invariant polynomials with applications to Quantum computing, 2024 IEEE AITU: Digital Generation, **Astana IT University**, 2024.
2. Fundamental invariants, the Thematic Research Programme "Tensors: geometry, complexity and quantum entanglement", University of Warsaw, Excellence Initiative–Research University, the **Simons Foundation**, **Polish Academy of Sciences**, 2023.
3. Some unimodal sequences of Kronecker coefficients, Seminar in Partition Theory, q-Series and Related Topics, **Michigan Technological University**, 2024.
4. Fundamental invariants, **Polish Academy of Sciences seminar**, Bendlewo, Poland, 2023.
5. MacMahon's statistics on higher-dimensional partitions, **ADA University seminar**, 2022.
6. Combinatorial hyperdeterminant and multiplanar networks, Traditional international April mathematical conference dedicated to the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, **Institute of Mathematics, Kazakhstan**, 2022.

Publications. According to the topic of the dissertation there were published 7 printed works, including 3 articles in Scopus or Web of Science Q1 journals and 1 article in Q2 journal, 3 articles in journal recommended by WAC, 1 act of implementation and 1 author's certificate.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction and 3 chapters, contains 116 pages, 13 figures and 11 tables, 7 listings a list of used sources of 69 references and applications.