

МАШУРОВ ФАРУХ АРКИНОВИЧ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ТОРТКАРА И АССОСИММЕТРИЧНЫЕ
АЛГЕБРЫ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности
«8D06103 – Математическое и компьютерное моделирование»

Актуальность темы исследования. Представляемая диссертационная работа сосредоточена на двух классических проблемах, в изучении неассоциативных алгебр над коммутатором и в классификации конечномерных алгебр. Неассоциативные алгебры играют важную роль во многих областях математики. Давно известно, что неассоциативные алгебры, например лиевые и йордановые алгебры, возникли в рамках физики и получили большое развитие благодаря своим приложениям в этой области науки.

В последнее время широкий интерес возникает при исследовании других новых видов неассоциативных алгебр над коммутатором и антикоммутатором, таких как алгебры пре-лиевые, Новикова, ассосимметричные, бикоммутативные, Зинбиля, и другие алгебры. А. Джумадильдаев доказал, что ассосимметричные алгебры над антикоммутатором удовлетворяют тождествам тройные Ли и Гленни. В 2007 году А. Джумадильдаевым было доказано что алгебра Зинбиля над коммутатором удовлетворяет полиномиальным тождествам антикоммутативности и Торткара. Более того в той же работе были даны примеры алгебр Торткара. Например, пусть $A = (C[x], \circ)$ это алгебра с умножением

$$a \circ b = b \int_0^x a dx$$

Тогда алгебра A является алгеброй Зинбиля. Если рассмотреть коммутаторное произведение данная алгебра дает пример алгебры Торткара. То есть, алгебра $(C[x], [,])$ это алгебра с умножением

$$[a, b] = b \int_0^x a dx - a \int_0^x b dx$$

является алгеброй Торткара. Также можно рассмотреть как пример алгебры Торткара, алгебру $(C[x], *)$ это алгебра с умножением

$$a * b = \int_0^x \frac{d}{dx}(a)b dx - \int_0^x \frac{d}{dx}(b)a dx.$$

Недавно, М. Бремнер методами компьютерной алгебры изучил специальные тождества в терминах тройного произведения Торткара и обнаружил тождества в степени пять и семь в терминах тройного произведения. П. Колесников показал что класс всех специальных алгебр Торткара не образует многообразие. Кроме того, он задал вопрос о максимальном числе свободных образующих, для которых все гомоморфные образы свободной специальной алгебры Торткара являются специальными. Мы изучаем гомоморфные образы свободных специальных алгебр Торткара при помощи лиевых элементов в свободной алгебре Зинбиля. И предоставляем ответ на вопрос который был задан П. Колесниковым. Также получаем аналог классической теоремы Кона в теории йордановых алгебр для свободных специальных алгебр Торткара.

Если первая часть диссертации посвящена классам алгебр Зинбиля над коммутаторным умножением, то вторая часть посвящена ассосимметричным алгебрам относительно коммутаторов и классификации нильпотентных ассосимметричных алгебр. Второй подход в нашем исследовании заключается в определении структуры Ли допустимой алгебры, когда связанная с ней алгебра Ли удовлетворяет определенным свойствам. Многие свойства коммутаторов имели аналоги в теории ассоциативных алгебр с подходящим определением «коммутаторных идеалов». Дженнингс распространил понятия «нильпотентной группы» и «разрешимой группы» на кольцо. Он доказал, что если A — ассоциативная алгебра над полем с характеристиками, отличными от 2, если ассоциированная алгебра Ли разрешима, то A разрешима. Более того, он получил, что если A — ассоциативная алгебра, ассоциированная с которой алгебра Ли нильпотентна, то идеал $A \circ A$ нильпотентен. Ассосимметричные алгебры, введенные Кляйнфельдом, близки к ассоциативным. Он доказал, что ассосимметричное кольцо характеристики отличной от 2 и 3, без идеалов $I \neq 0$ такое, что $I^2 = 0$, ассоциативно. Ассосимметричные алгебры как ассоциативные алгебры относительно коммутатора являются Ли допустимыми алгебрами. Мы продолжаем исследование Ли допустимых алгебр, таких как ассосимметричные алгебры, в терминах ассоциированных алгебр Ли.

Третья рассматриваемая проблема — классическая задача теории неассоциативных алгебр — классифицировать (с точностью до изоморфизма) алгебр размерности n , возникающих из заданного многообразия, описываемого набором полиномиальных тождеств. Понятие центрального расширения алгебры берет свое начало в теории групп и было введено для изучения алгебр Ли и других классов неассоциативных алгебр. Пусть дана конечномерная алгебра над полем комплексных чисел, снабженная билинейным произведением. Учитывая многообразие, определенное над некоторыми полиномиальными тождествами, одна из классических исследовательских задач состоит в том, чтобы с точностью до изоморфизма классифицировать все алгебры внутри этого многообразия с фиксированной размерностью. Многообразия ассоциативной, альтернативной, Ли, Новикова, Йордана, Лейбница, Зинбиля являются одними из наиболее изученных многообразий. Классификация включает несколько шагов, каждый из

которых требует символьного решения системы полиномиальных уравнений. Вычислительные аспекты зависят от многих переменных, включая размерность алгебры, билинейное произведение и количество тождеств, и может потребоваться решение системы из более чем n^3 полиномиальных уравнений с n^2 неизвестными, где n - фиксированная размерность алгебры. Очевидно, что вычисления могут стать громоздкими, даже если размерность всего 2. Таким образом, многие авторы полагаются на компьютерные классификации и методы.

Объектом исследования являются алгебры Зинбиля над коммутатором и нильпотентные ассосимметричные алгебры.

Целью диссертационной работы является нахождения критерия для лиевых элементов в свободной алгебре Зинбиля, построение базиса для специальных алгебр Торткара, исследование гомоморфного образа свободной специальной алгебры Торткара и классификация нильпотентных ассосимметричных алгебр малых размерностей.

Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие основные задачи исследования:

- нахождение критерия для определения лиевых элементов в свободной алгебре Зинбиля;
- изучение гомоморфных образов свободной специальной алгебры Торткара с двумя и тремя образующими;
- рассмотреть специальные тождества с двумя образующими;
- изучить ассосимметричные алгебры конечного класса и коммутаторные идеалы ассосимметричных алгебр;
- построение алгебраической классификации нильпотентных ассосимметричных алгебр малых размерностей с использованием метода классификации Скъельбрета-Сунда;

Для получения алгебраическую классификацию нильпотентных конечномерных ассосимметричных алгебр мы предоставляем унифицированный алгоритм с кодом, написанным в Wolfram Mathematica, чтобы упростить вычислительные аспекты проблемы классификации нильпотентных алгебр. Он унифицирован в том смысле, что для запуска кода требуются минимальные усилия, а именно для определения билинейного произведения и полиномиальных тождеств для изучаемого вида алгебраического многообразия. Более того, большая часть вычислительных шагов выполняется кодом. Частично мы используем функцию "solve", встроенный в Wolfram Mathematica символьный решатель, при работе с системой полиномиальных уравнений. Это основная функция, которая занимает большую часть времени компиляции. Коды, написанные авторами в другом программном обеспечении, включая Matlab и Python, дали худшие результаты с точки зрения времени работы и в некоторых случаях не смогли предоставить какие-либо решения. Несомненно, решение системы символьных нелинейных уравнений - непростая задача даже для такого продвинутого языка программирования. Более того, он был использован для классификации ассосимметричных алгебр размерности 4 и одно-порожденной ассосимметричной алгебры размерностей 5 и 6.

Методы исследования. Используются методы структурной и комбинаторной теории свободных цинбильевских и ассосимметричных алгебр. Мы изучаем основные методы построения центральных расширений неассоциативных алгебр. Мы получаем новые примеры неассоциативных алгебр методом Скъельбрета – Сунда (Skjelbred-Sund).

Научная новизна и значимость диссертации. Диссертационное исследование представляет собой вклад в развитие теории неассоциативных алгебр, особенно в области свободных алгебр Зинбиля и Торткара, а также ассосимметричных алгебр. Научная новизна исследования заключается в следующих результатах:

- Найден критерий для определения левых элементов в свободной алгебре Зинбиля. Используя критерий построен базис для специальных алгебр Торткара;

- Показано, что существует исключительный гомоморфный образ свободной специальной алгебры Торткара с тремя образующими. Доказаны, что любой гомоморфный образ свободной специальной алгебры Торткара с двумя образующими является специальным и что нет специального тождества с двумя образующими;

- Было изучено, что если A — ассосимметричная алгебра конечного класса, то $A \circ A$ нильпотентна нильпотентного индекса, меньшего или равного классу A ;

- Построена алгебраическая классификация нильпотентных 4-мерных ассосимметричных алгебр и классификация нильпотентных 5- и 6- мерных ассосимметричных алгебр с одной порождающей.

Эти результаты имеют важное значение для дальнейшего развития теории выше упомянутых алгебр, а также могут быть применены в различных областях, связанных с использованием алгебр, включая математику, физику и информатику. Например, результаты исследования могут быть использованы для улучшения методов классификации алгебр и разработки новых алгоритмов решения задач, связанных с алгебрами. Кроме того, результаты работы могут иметь практическое значение в различных областях, где применяются алгебры, в том числе в криптографии, теории кодирования и машинном обучении. Таким образом, данное исследование представляет собой важный вклад в развитие теории алгебр и может иметь широкое практическое применение.

Публикации. В период обучения были сделаны 7 публикаций в международных журналах базируемых в базах Scopus и Web of Science.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

1. Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Mashurov F.A. On the speciality of Tortkara algebras // Journal of Algebra. - 2019. - Vol. 540. - P. 1–19. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
2. Ismailov N., Kaygorodov I., Mashurov F. The algebraic and geometric classification of nilpotent assosymmetric algebras // Algebras and Representation Theory. Springer, - 2021. - Vol. 24, № 1. - P. 135–148. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 52% in Mathematics)

3. Mashurov F., Kaygorodov I. One-generated nilpotent assosymmetric algebras // Journal of Algebra and Its Applications. - 2022. - Vol. 21, № 02. - P. 2250031. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
4. Kadyrov Sh., Mashurov F. Unified computational approach to nilpotent algebra classification problems // Communications in Mathematics. - 2021. - Vol. 29, № 2. - P. 215–226. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

А также были сделаны следующие публикации:

5. Kadyrov S., Mashurov F. Generalized continued fraction expansions for π and e // Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography. Taylor and Francis, - 2021. - Vol. 24, № 6. - P. 1809–1819. (Scopus: CiteScore = 1.9, Percentile 77% in Mathematics)
6. Ismailov N., Mashurov F., Smadyarov N. Defining identities for mono and binary Zinbiel algebras // Journal of Algebra and Its Applications. World Scientific, - 2022. - P. 2350165. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
7. Kaygorodov I., Lopes S.A., Mashurov F. Actions of the additive group G_a on certain noncommutative deformations of the plane // Communications in Mathematics. - 2021. - Vol. 29. - P. 269–279. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложение. Общий объем диссертации составляет 86 страниц. Список использованных источников, приведенный в конце работы, содержит 68 наименования.

Основное содержание диссертации. В первой главе определяются и напоминаются основные понятия и свойства неассоциативных алгебр. Кроме того, приведены известные результаты и сведения из теории свободных неассоциативных алгебр, таких как алгебр Йордана, Зинбиля, Торткара и из теории конечномерных алгебр.

Следующая глава посвящена изучению свободных алгебр Зинбиля над коммутатором. Первый раздел этой главы посвящен получению основных лемм, которые впоследствии используются для доказательства основных теорем главы. Второй раздел этой главы посвящен исследованию лиевых элементов в свободной алгебре Зинбиля, построению базиса для специальных алгебр Торткара и исследованию гомоморфного образа свободной специальной алгебры Торткара.

Третья глава диссертации посвящена исследованию ассосимметричных алгебр конечного класса и коммутаторных идеалов ассосимметричных алгебр. Основная цель начального раздела заключается в изучении свойств ассосимметричных алгебр конечного класса и их сходства с ассоциативными алгебрами конечного класса. Последняя часть данной главы посвящена алгебраической классификации нильпотентных ассосимметричных алгебр.

MASHUROV FARUKH ARKINOVICH

SPECIAL TORTKARA ALGEBRAS AND ASSOSYMMETRIC ALGEBRAS

ABSTRACT

A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirement
for the degree of Doctor of Philosophy (PhD)
«8D06103 – Mathematical and Computer Modeling»

Relevance of the research topic. The presented dissertation focuses on the classical problems in studying nonassociative algebras over a commutator and classifying finite-dimensional algebras. Nonassociative algebras play an essential role in many areas of mathematics. It is known that nonassociative algebras, such as Lie and Jordan algebras, originated within the framework of physics and have been extensively developed due to their applications in this field of science.

Recently, there has been broad interest in studying other new types of nonassociative algebras under the commutator and anticommutator, such as Novikov, assosymmetric, bicommutative, Zinbiel, and other algebras. A. Dzhumadil'daev proved that assosymmetric algebras under anticommutator satisfy Lie triple and Glennie identities. In 2007, A. Dzhumadil'daev proved that Zinbiel algebra under commutator satisfies the anticommutativity and Tortkara identities. Moreover, examples of Tortkara algebras were given in the same work. For example, let $A = (C[x], \circ)$ is algebra with multiplication

$$a \circ b = b \int_0^x a dx$$

Then algebra A is a Zinbiel algebra. Considering the commutator product, this algebra gives an example of Tortkara algebra. That is, algebra $(C[x], [,])$ with multiplication

$$[a, b] = b \int_0^x a dx - a \int_0^x b dx$$

is Tortkara algebra. We can also consider as an example of the Tortkara algebra, the algebra $(C[x], *)$ with multiplication

$$a * b = \int_0^x \frac{d}{dx} (a)b dx - \int_0^x \frac{d}{dx} (b)a dx.$$

Recently, M. Bremner using representation theory, studied special identities in terms of the triple product of Tortkara algebra and discovered identities in degrees five and seven in terms of the triple product. P. Kolesnikov showed that the class of all special Tortkara algebras does not form a variety. In addition, he asked a question about

the maximum number of free generators for which all homomorphic images of a free special Tortkara algebra are special. We study homomorphic images of free special Tortkara algebras using Lie elements in a free Zinbiel algebra. And we provide an answer to the question that P. Kolesnikov asked. We also obtain an analogue of the classical Cohn theorem in the theory of Jordan algebras for free special Tortkara algebras.

If the first part of the dissertation is devoted to classes of Zinbiel algebras under commutator, the second part is devoted to assosymmetric algebras under commutators and the classification of finite-dimensional nilpotent assosymmetric algebras. The second approach in our investigation is determining the structure of a Lie-admissible algebra when its related Lie algebra satisfies certain properties. Many of the properties of commutator subgroups had analogues in the theory of associative algebras. Jennings extended the concepts of a “nilpotent group” and a “solvable group” to a ring. He proved that if A is an associative algebra over a field with characteristics not equal to 2, if the associated Lie algebra is solvable, then A is solvable. Moreover, he obtained that if A is an associative algebra whose associated Lie algebra is nilpotent, then the ideal $A \circ A$ of A is nilpotent. Assosymmetric algebras are introduced by Kleinfeld, which come close to being associative. Assosymmetric algebras as associative algebras under commutator are Lie-admissible algebras. Kleinfeld proved that an assosymmetric ring of characteristic different from 2 and 3, without ideals $I \neq 0$, such that $I^2 = 0$ is associative. We are continuing the investigation of Lie-admissible algebras, such as assosymmetric algebras, in terms of their associated Lie algebras.

The third considered problem is the classical problem in the theory of nonassociative algebras is to classify (up to isomorphism) the algebras of dimension n arising from a given variety described by a set of polynomial identities. A central extension of algebra originated in group theory and was introduced to study Lie algebras and other classes of nonassociative algebras. Let us have a finite-dimensional algebra over a field of complex numbers equipped with a bilinear product. One of the classical research problems is to classify all finite-dimensional algebras in this variety with fixed dimensions up to isomorphism. The most studied are the varieties of associative, alternative, Lie, Novikov, Jordan, Leibniz, and Zinbiel algebras. Classification involves several steps, each of which requires a symbolic solution of a system of polynomial equations. Computational aspects depend on many variables, including the dimension of the algebra, the bilinear product and the number of identities. It may be necessary to solve a system of more than n^3 polynomial equations with n^2 unknown, where n is the fixed dimension of the algebra. Obviously, calculations can become cumbersome, even if the dimension is only 2. Thus, many authors rely on computer classifications and methods.

The objects of study are Zinbiel algebras under commutator and nilpotent assosymmetric algebras.

The purpose of the dissertation work is to find a criterion for Lie elements in the free Zinbiel algebra, construct a basis for special Tortkara algebras, and study the homomorphic image of a free special Tortkara algebra, and classify nilpotent assosymmetric algebras of low dimensions.

To achieve the goal of the dissertation work, the following main research objectives are considered:

- finding a criterion for determining the Lie elements in the free Zinbiel algebra;
- the study of homomorphic images of a free special Tortkara algebra with two and three generators;
- special identities with two generators;
- study assosymmetric algebras of finite class and commutator ideals of assosymmetric algebras;
- construction of an algebraic classification of nilpotent assosymmetric algebras of small dimensions using the Skjelbred-Sund classification method;

To obtain an algebraic classification of nilpotent finite-dimensional assosymmetric algebras, we provide a unified algorithm with code written in Wolfram Mathematica to simplify the computational aspects of the classification problem for nilpotent algebras. It is unified in the sense that minimal effort is required to run the code, namely, to determine the bilinear product and polynomial identities for the type of algebraic variety under study. Moreover, most of the computational steps are performed by the code. We partially use the “solve” function, the symbolic solver built into Wolfram Mathematica, when working with a system of polynomial equations. This is the primary function that takes up most of the compilation time. Codes written by the authors in other software, including Matlab and Python, gave the worst running time results and failed to provide any solutions in some cases. Solving a system of symbolic nonlinear equations is not easy, even for such an advanced programming language. Moreover, it has been used to classify assosymmetric algebras of dimension 4 and one-generated assosymmetric algebras of dimensions 5 and 6.

The general methodology of the research. We use methods of structural and combinatorial theory of free Zinbiel and assosymmetric algebras. We study the basic methods of constructing central extensions of nonassociative algebras. We obtain the algebraic classification of small dimensional nilpotent assosymmetric algebras by the Skjelbred-Sund classification method.

Scientific novelty and significance of the dissertation. The dissertation research contributes to developing the theory of nonassociative algebras, especially in the free Zinbiel and Tortkara algebras and assosymmetric algebras. The main results of the dissertation are as follows:

- The criteria for determining Lie and Jordan elements in a free Zinbiel algebra is obtained;
- A basis for a free special Tortkara algebra is described;
- An exceptional homomorphic image of a free special Tortkara algebra with three generators is constructed. The speciality of any homomorphic image of a free special Tortkara algebra with two generators is proved. It was established that there is no special identity with two generators.
- It was studied that if A be an assosymmetric algebra of finite class, then $A \circ A$ is nilpotent of nilpotent index less or equal to the class of A ;

- The algebraic classification of nilpotent 4-dimensional assosymmetric algebras and the classification of nilpotent 5- and 6-dimensional assosymmetric algebras with one generator is obtained.

These results are important for the further development of the theory of the above-mentioned algebras. They can also be applied in various fields related to the use of algebras, including mathematics, physics and computer science. For example, the results of the study can be used to improve methods for classifying algebras and developing new algorithms for solving problems related to algebras. In addition, the results of the work can be of practical importance in various fields where algebras are applied, including cryptography, coding theory and machine learning. Thus, this study is an important contribution to the development of the theory of algebras and can have a wide practical application.

Publications. During the period of doctoral studies, 7 publications were published in international journals indexed by Scopus and Thomson. The main results on the topic of the dissertation were published in the form of articles:

1. Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Mashurov F.A. On the speciality of Tortkara algebras // *Journal of Algebra*. - 2019. - Vol. 540. - P. 1–19. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
2. Ismailov N., Kaygorodov I., Mashurov F. The algebraic and geometric classification of nilpotent assosymmetric algebras // *Algebras and Representation Theory*. Springer, - 2021. - Vol. 24, № 1. - P. 135–148. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 52% in Mathematics)
3. Mashurov F., Kaygorodov I. One-generated nilpotent assosymmetric algebras // *Journal of Algebra and Its Applications*. - 2022. - Vol. 21, № 02. - P. 2250031. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
4. Kadyrov Sh., Mashurov F. Unified computational approach to nilpotent algebra classification problems // *Communications in Mathematics*. - 2021. - Vol. 29, № 2. - P. 215–226. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

And the following publications were also made:

5. Kadyrov S., Mashurov F. Generalized continued fraction expansions for π and e // *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*. Taylor and Francis, - 2021. - Vol. 24, № 6. - P. 1809–1819. (Scopus: CiteScore = 1.9, Percentile 77% in Mathematics)
6. Ismailov N., Mashurov F., Smadyarov N. Defining identities for mono and binary Zinbiel algebras // *Journal of Algebra and Its Applications*. World Scientific, - 2022. - P. 2350165. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
7. Kaygorodov I., Lopes S.A., Mashurov F. Actions of the additive group G_a on certain noncommutative deformations of the plane // *Communications in Mathematics*. - 2021. - Vol. 29. - P. 269–279. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

The structure and scope of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and an appendix. The total volume of the dissertation is 86 pages. The list of references, given at the end of the work, contains 68 titles.

The main content of the dissertation.

In the first chapter, the fundamental notions and properties of nonassociative algebras are defined and recalled. Additionally, known results about specific types of nonassociative algebras, such as Jordan, Zinbiel, Tortkara, and assosymmetric algebras, are presented.

The next chapter is devoted to the study of free Zinbiel algebras over a commutator. The first section of this chapter is dedicated to obtaining the main lemmas, which are subsequently used to prove the main theorems of the chapter. The second section of this chapter is devoted to the study of Lie elements in a free Zinbiel algebra, the construction of a basis for special Tortkara algebras and the study of the homomorphic image of free special Tortkara algebras.

The third chapter of this dissertation focuses on the study of assosymmetric algebras of finite class and commutator ideals of assosymmetric algebras. The main objective of the initial section is to examine the properties of assosymmetric algebras of finite class and demonstrate that they possess similar characteristics to associative algebras of finite class. The results obtained in this section can be used to develop the theory of assosymmetric algebras further. The last part of this chapter is devoted to the algebraic classification of nilpotent assosymmetric algebras.

МАШУРОВ ФАРУХ АРКИНОВИЧ

ЕРЕКШЕ ТӨРТҚАРА АЛГЕБРАЛАР ЖӘНЕ АССОСИММЕТРИЯЛЫҚ
АЛГЕБРАЛАР

РЕФЕРАТ

«8D06103 – Математикалық және компьютерлік модельдеу» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға арналған диссертация

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Ұсынылған диссертациялық жұмыс екі классикалық мәселеге, коммутатор арқылы ассоциативті емес алгебраларды зерттеуге және ақырлы өлшемді алгебраларды классификациялауға бағытталған. Ассоциативті емес алгебралар математиканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарады. Ли және Йордан алгебралары сияқты ассоциативті емес алгебралардың физика аясында пайда болғаны және олардың ғылымның осы саласында қолданылуына байланысты дамығаны бұрыннан белгілі.

Соңғы уақытта коммутатор мен антикоммутатор арқылы ассоциативтік емес алгебралардың басқа жаңа түрлерін, мысалы пре-Ли, Новиков, ассосимметриялық, бикоммутативті, Зинбил және басқа алгебраларды зерттеуге үлкен қызығушылық туындауда. Коммутаторға қатысты ассосимметриялық алгебра Ли алгебрасы болып табылады. А. Жұмаділдаев антикоммутатор көбейтіндісінде ассосимметриялық алгебралар үштік Ли және Гленни тепе-теңдіктерін қанағаттандыратынын дәлелдеді. 2007 жылы А. Жұмаділдаев коммутатор көбейтіндісінде Зинбил алгебрасы антикоммутативтілік пен Төртқара тепе-теңдіктерін қанағаттандыратынын дәлелдеді. Сонымен қатар, сол мақалада Төртқара алгебраларының мысалдары келтірілген. Мысалы, $A = (C[x], \circ)$ келесідей көбейтіндісі бар алгебра болсын

$$a \circ b = b \int_0^x a \, dx.$$

Онда A алгебрасы Зинбил алгебрасы болады. Егер коммутатор көбейтіндісінде қарастырсақ, бұл алгебра Төртқара алгебрасының мысалын береді. Яғни, $(C[x], [,])$ алгебрасы келесі көбейту ережесімен

$$[a, b] = b \int_0^x a \, dx - a \int_0^x b \, dx$$

Төртқара алгебрасы болады. Сондай-ақ, Төртқара алгебрасының мысалы ретінде $(C[x], *)$ келесі көбейтіндімен анықталған алгебраны қарастыруға болады

$$a * b = \int_0^x \frac{d}{dx}(a)b dx - \int_0^x \frac{d}{dx}(b)a dx.$$

Жақында М. Бремнер компьютерлік алгебра әдістерін қолдана отырып үштік Төртқара көбейтіндісі тұрғысынан ерекше тепе-теңдіктерді зерттеді және үштік көбейтінді бойынша бесінші және жетінші дәрежедегі тепе-теңдіктерді тапты. П. Колесников барлық ерекше Төртқара алгебралар классы көпбейне құрамайтынын көрсетті. Сонымен қатар, ол еркін ерекше Төртқара алгебрасының барлық гомоморфты бейнелері ерекше болатын туындатушылардың максималды саны туралы сұрақ қойды. Бұл диссертациялық жұмыста еркін Зинбил алгебрасында Ли элементтерінің көмегімен еркін ерекше Төртқара алгебраларының гомоморфты бейнелерін зерттейміз және П. Колесников қойған сұраққа жауап береміз. Сондай-ақ біз еркін ерекше Төртқара алгебралары үшін Йордан алгебралар теориясындағы классикалық Кон теоремасының аналогын аламыз.

Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімі коммутатордың көбейтіндісі бойынша Зинбил алгебраларына арналса, екінші бөлім коммутаторларға қатысты ассосимметриялық алгебраларға және нильпотентті ассосимметриялық алгебралардың классификациясына арналған. Біздің зерттеуіміздегі екінші мәселе – Ли алгебрасына байланысты белгілі бір қасиеттерді қанағаттандыратын кезде Ли болатын алгебраның құрылымын анықтау. Коммутаторлардың көптеген қасиеттерінің ассоциативті алгебралар теориясында ұқсастықтары бар. Дженнингс сақиналар теориясына «нильпотентті топ» және «шешімді топ» ұғымдарын кеңейтті. Ол 2-ден басқа сипаттамалары бар өріс бойынша A ассоциативті алгебра болса, егер шешімді Ли болатын алгебрасы бар болса, онда A шешімді болатынын дәлелдеді. Сонымен қатар, ол егер A ассоциативті алгебра болса, оның байланысқан Ли алгебрасы нильпотентті болса, онда A алгебраның идеалы $A \circ A$ нильпотентті болатынын көрсетті. Кляйнфельд енгізген ассосимметриялық алгебралар ассоциативті алгебраларға жақын. Ол $I^2 = 0$ болатындай $I \neq 0$ идеалдары жоқ, 2 және 3-тен өзге сипаттамасы бар өріс үстінде ассосимметриялық сақинаның ассоциативті екенін дәлелдеді. Ассосимметриялық алгебралар коммутаторға қатысты ассоциативті алгебралар сияқты Ли алгебралары болып табылады. Біз ассосимметриялық алгебралардың Ли алгебраларына байланысы тұрғысынан зерттеуді жалғастырамыз.

Диссертацияда қарастырылып отырған үшінші мәселе ассоциативті емес алгебралар теориясындағы классикалық мәселе: көпмүшелік тепе-теңдіктер жиынтығымен сипатталған берілген көпбейнеден туындайтын n өлшемді алгебраларды (изоморфизмге дейін) жіктеу, яғни классификациялау. Алгебраның орталық кеңеюі тұжырымдамасы топтық теориядан бастау алады және Ли алгебраларын және ассоциативті емес алгебралардың басқа класстарын зерттеу үшін енгізілген. Екі элемент көбейтіндісімен жабдықталған комплекс сандар өрісі үстінде шекті өлшемді алгебра берілсін. Кейбір көпмүшелік тепе-теңдіктер бойынша анықталған көпбейнені ескере отырып, классикалық зерттеу мәселелерінің бірі осы бекітілген өлшемді көпбейнедегі барлық шекті өлшемді

алгебраларды изоморфизмге дейін жіктеу, яғни классификациялау болып табылады. Ассоциативті, альтернативті, Ли, Новиков, Йордан, Лейбниц, Зинбил алгебралары көп зерттелген алгебралар қатарына жатады. Классификациялау бірнеше қадамдарды қамтиды, олардың әрқайсысы көпмүшелік теңдеулер жүйесінің символдық шешімін талап етеді. Есептеу аспектілері көптеген айнымалыларға, соның ішінде өлшеміне, көбейтіндіге және тепе-теңдіктер санына байланысты және n^3 көпмүшелік теңдеулерден n^2 белгісізден тұратын жүйені шешу қажет болуы мүмкін, мұндағы n - алгебраның бекітілген өлшемі. Алгебра өлшемі 2 болса да, есептеулер қиынға соғатыны анық. Осылайша, көптеген авторлар компьютерлік классификациялар мен әдістерге сүйенеді.

Зерттеу объектілер – коммутатор үстіндегі Зинбил алгебралары және нильпотентті ассосимметриялық алгебралар.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты: еркін Зинбил алгебрасында Ли элементтерінің критерийін табу, ерекше Төртқара алгебраларының базисын құру, еркін ерекше Төртқара алгебрасының гомоморфтық бейнесін зерттеу және шекті өлшемді нильпотентті ассосимметриялық алгебраларды классификациялау.

Диссертациялық жұмыстың мақсатына жету үшін келесі негізгі зерттеу міндеттері қарастырылады:

- еркін Зинбил алгебрасында Ли элементтерін анықтау критерийін табу;
- екі және үш туындатушылар бар еркін ерекше Төртқара алгебрасының гомоморфты бейнелерін зерттеу;
- екі туындатушысы бар ерекше Төртқара алгебрасының тепе-теңдіктерін қарастыру;
- ақырлы класстың ассосимметриялық алгебраларын және ассосимметриялық алгебралардың коммутаторлық идеалдарын зерттеу;
- Скульбред-Сунд классификация әдісін қолдана отырып, шағын өлшемді нильпотентті ассосимметриялық алгебраларының алгебралық классификациясын құру;

Нильпотентті шекті өлшемді ассосимметриялық алгебраларының алгебралық жіктелуін алу үшін біз нильпотентті алгебраларға арналған классификациялау әдісінің есептеу аспектілерін жеңілдету үшін Wolfram Mathematica тілінде жазылған кодпен біртұтас алгоритмді береміз. Бұл кодты іске қосу үшін, атап айтқанда, зерттелетін алгебралының түріне арналған көбейту ережесі мен көпмүшелік тепе-теңдіктерін анықтау үшін ең аз күш қажет етеді. Сонымен қатар, есептеу қадамдарының көпшілігі кодпен орындалады. Көпмүшелік теңдеулер жүйесімен жұмыс істеу кезінде біз «шешу» функциясын, Wolfram Mathematica жүйесіне енгізілген символдық шешушісін ішінара пайдаланамыз. Бұл компиляция уақытының көп бөлігін алатын негізгі функция. Авторлар басқа бағдарламалық жасақтамаларда, соның ішінде Matlab және Python-да жазған кодтары жұмыс уақыты бойынша нашар нәтижелерді берді және кейбір жағдайларда ешқандай шешімді қамтамасыз ете алмады. Символдық сызықты емес теңдеулер жүйесін шешу тіпті осындай жетілдірілген бағдарламалау тілі үшін де оңай міндет емес екені сөзсіз. Сонымен қатар, ол 4

өлшемді ассосимметриялық алгебраларды және 5 және 6 өлшемдердің бір элементтен туындатылған ассосимметриялық алгебраларын классификациялау үшін пайдаланылды.

Зерттеу әдістері. Еркін Зинбил және ассосимметриялық алгебралардың құрылымдық және комбинаторлық теориясының әдістері қолданылады. Біз ассоциативті емес алгебралардың орталық кеңеюін құрудың негізгі әдістерін зерттейміз. Біз Скьельбрэд – Сунд (Skjelbred-Sund) әдісімен ассоциативті емес алгебралардың жаңа мысалдарын аламыз.

Диссертацияның ғылыми жаңалығы мен маңыздылығы. Диссертациялық зерттеу ассоциативті емес алгебралар теориясының дамуына, әсіресе Зинбил мен Төртқара еркін алгебралары мен ассосимметриялық алгебралар теориясында үлесін қосады. Зерттеудің ғылыми жаңалығы келесі нәтижелерде жатыр:

- Еркін Зинбил алгебрасында Ли элементтерін анықтау критерийі табылды. Критерийді қолдана отырып ерекше Төртқара алгебралары үшін базисы табылды;

- Үш туындатушысы бар еркін ерекше Төртқара алгебрасының ерекше гомоморфты бейнесі бар екендігі көрсетілген. Екі туындатушысы бар еркін ерекше Төртқара алгебрасының кез-келген гомоморфты бейнесі ерекше екендігі және ерекше тепе-теңдік жоқ екендігі дәлелденді;

- егер A шекті класстың ассосимметриялық алгебрасы болса, онда $A \circ A$ нильпотент көрсеткішінің A класынан кіші немесе оған тең болатыны көрсетілді;

- Нильпотентті 4 өлшемді ассосимметриялық алгебралардың алгебралық классификациясы және бір туындатушысы бар нильпотентті 5 және 6 өлшемді ассосимметриялық алгебралардың классификациясы құрылды.

Бұл нәтижелер жоғарыда аталған алгебралардың теориясын одан әрі дамыту үшін өте маңызды, сонымен қатар алгебраларды қолдануға байланысты әртүрлі салаларда, соның ішінде математика, физика және информатикада қолданылуы мүмкін. Мысалы, зерттеу нәтижелерін алгебраларды жіктеу әдістерін жақсарту және алгебраларға қатысты есептерді шешудің жаңа алгоритмдерін әзірлеу үшін пайдалануға болады. Сонымен қатар, жұмыс нәтижелері алгебралар қолданылатын әртүрлі салаларда, соның ішінде криптография, кодтау теориясы және машиналық оқытуда практикалық маңызы болуы мүмкін. Осылайша, бұл зерттеу алгебра теориясының дамуына маңызды үлес болып табылады және кең практикалық қолданысқа ие болуы мүмкін.

Жарияланымдар. Оқу барысында Scopus және Web of Science деректер базаларына негізделген халықаралық журналдарда 7 жарияланым жасалды. Диссертация тақырыбы бойынша нәтижелер келесі жұмыстарда жарияланды:

1. Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Mashurov F.A. On the speciality of Tortkara algebras // Journal of Algebra. - 2019. - Vol. 540. - P. 1–19. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)
2. Ismailov N., Kaygorodov I., Mashurov F. The algebraic and geometric classification of nilpotent assosymmetric algebras // Algebras and Representation

Theory. Springer, - 2021. - Vol. 24, № 1. - P. 135–148. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 52% in Mathematics)

3. Mashurov F., Kaygorodov I. One-generated nilpotent assosymmetric algebras // Journal of Algebra and Its Applications. - 2022. - Vol. 21, № 02. - P. 2250031. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)

4. Kadyrov Sh., Mashurov F. Unified computational approach to nilpotent algebra classification problems // Communications in Mathematics. - 2021. - Vol. 29, № 2. - P. 215–226. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

Сондай-ақ келесі басылымдар жарияланды:

5. Kadyrov S., Mashurov F. Generalized continued fraction expansions for π and e // Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography. Taylor and Francis, - 2021. - Vol. 24, № 6. - P. 1809–1819. (Scopus: CiteScore = 1.9, Percentile 77% in Mathematics)

6. Ismailov N., Mashurov F., Smadyarov N. Defining identities for mono and binary Zinbiel algebras // Journal of Algebra and Its Applications. World Scientific, - 2022. - P. 2350165. (Scopus: CiteScore = 1.3, Percentile 57% in Mathematics)

7. Kaygorodov I., Lopes S.A., Mashurov F. Actions of the additive group G_a on certain noncommutative deformations of the plane // Communications in Mathematics. - 2021. - Vol. 29. - P. 269–279. (Scopus: CiteScore = 0.4, Percentile 9% in Mathematics)

Жұмыс құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, үш тараудан, қорытындыдан, пайдаланылған дереккөздер тізімінен және қосымшадан тұрады. Диссертацияның жалпы көлемі 86 бетті құрайды. Жұмыстың соңында келтірілген пайдаланылған дереккөздердің саны 68.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Бірінші тарауда ассоциативті емес алгебралардың негізгі ұғымдары мен қасиеттері анықталады. Сонымен қатар, Йордан, Зинбил, Төртқара алгебралары сияқты еркін ассоциативті емес алгебралар теориясынан және ақырлы өлшемді алгебралар теориясынан белгілі нәтижелер мен мәліметтер келтірілген.

Келесі тарау коммутатор үстіндегі Зинбилдің еркін алгебраларын зерттеуге арналған. Бұл тараудың бірінші бөлімі тараудың негізгі теоремаларын дәлелдеу үшін қолданылатын негізгі леммаларды алуға арналған. Бұл тараудың екінші бөлімі Зинбил еркін алгебрасындағы Ли элементтерін зерттеуге, ерекше Төртқара алгебраларына базис құруға және еркін ерекше Төртқара алгебрасының гомоморфты бейнесін зерттеуге арналған.

Диссертацияның үшінші тарауы ассосимметриялық алгебраларды және ассосимметриялық алгебралардың коммутаторлық идеалдарын зерттеуге арналған. Бастапқы бөлімнің негізгі мақсаты ассосимметриялық ақырлы класс алгебраларының қасиеттерін және олардың ассоциативті ақырлы класс алгебраларына ұқсастығын зерттеу болып табылады. Бұл тараудың соңғы бөлімі nilпотентті ассосимметриялық алгебралардың алгебралық классификациясына арналған.